Математические модели вековых вариаций ГМ3

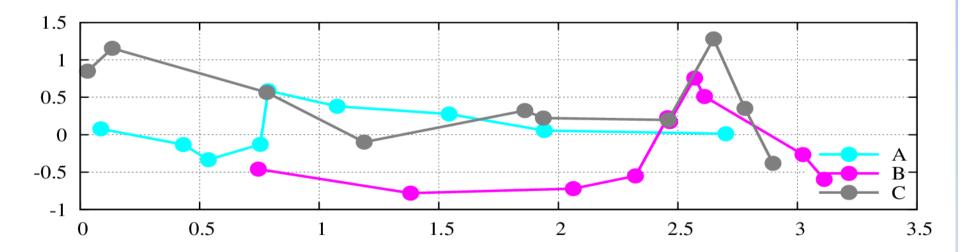
- Андрей Хохлов,
- ИТПЗ РАН, ГЦ РАН

• Все количественные оценки в реальных палеомагнитных записях проводятся на фоне вековых вариаций. Тем самым точность ответа определяется тем, что мы знаем и чего не знаем о вековых вариациях.

Структура доклада:

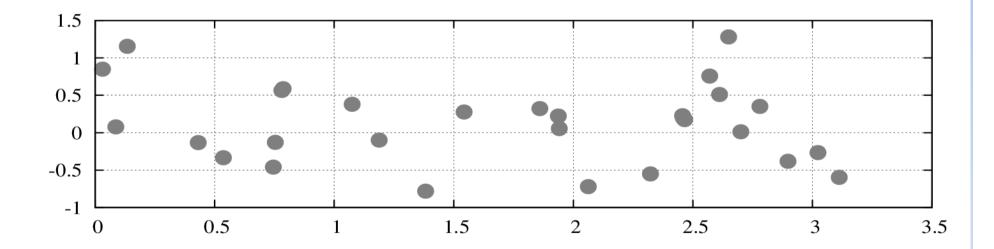
- Что полезного дает глобальная модель данных?
- Существующие модели вариаций ГМЗ, принципы построения, примеры использования.
- Принципы проверки соответствия реальности. Какая из моделей "верна"?

Примеры фрагментов данных

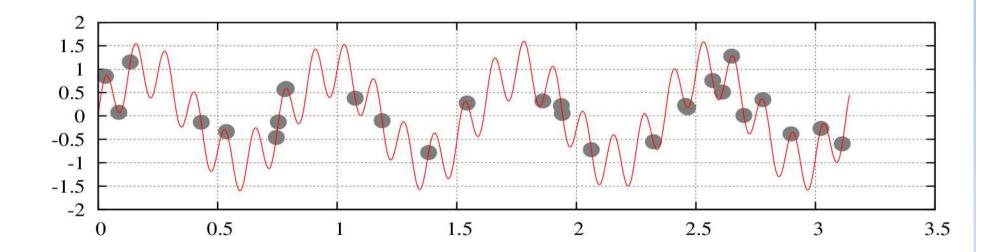


 Сравнительное поведение фрагментов данных вообще говоря не отвечает на вопрос об их "типичном" поведении.

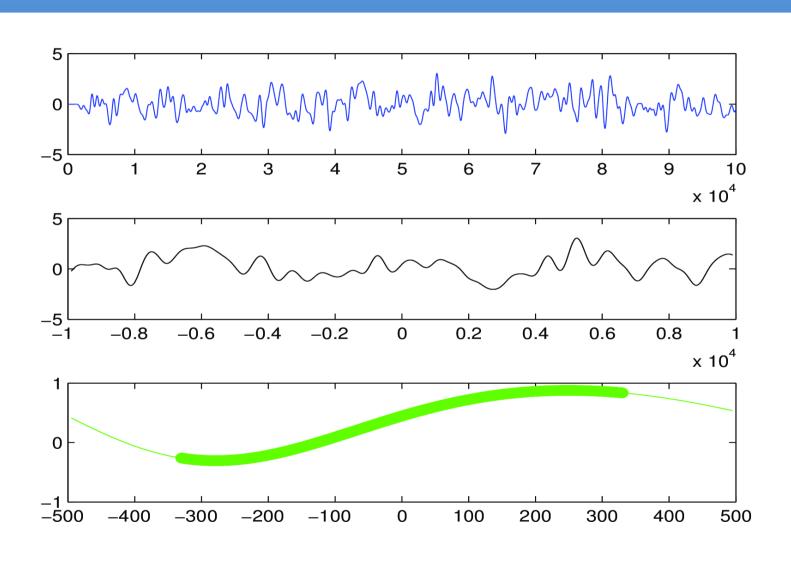
Структура объединенных данных



Объединенные данные и модель

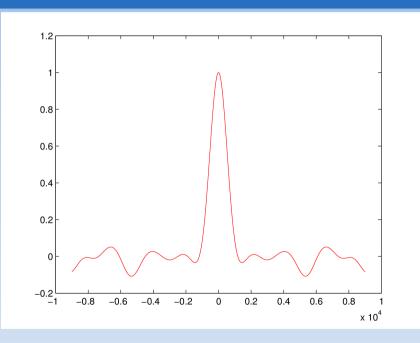


Язык теории случайных процессов.

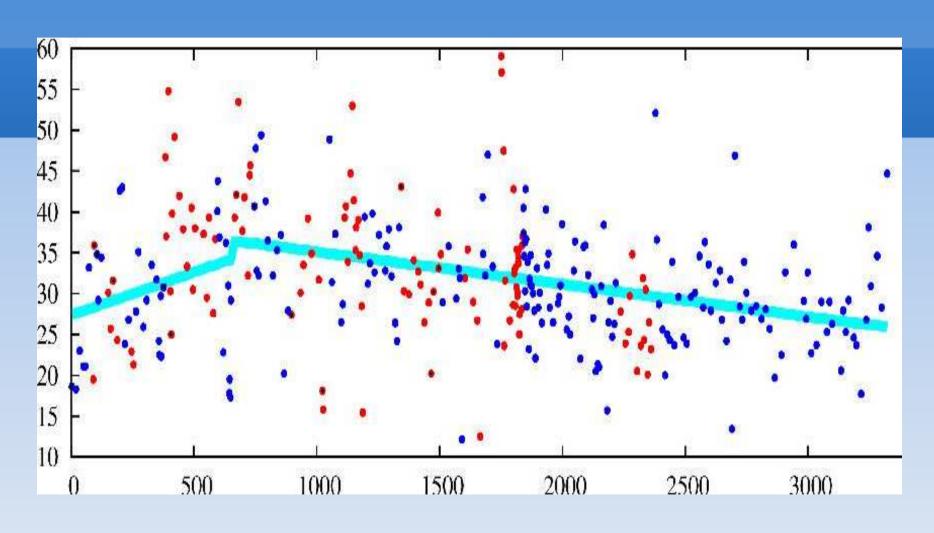


Язык теории случайных процессов.

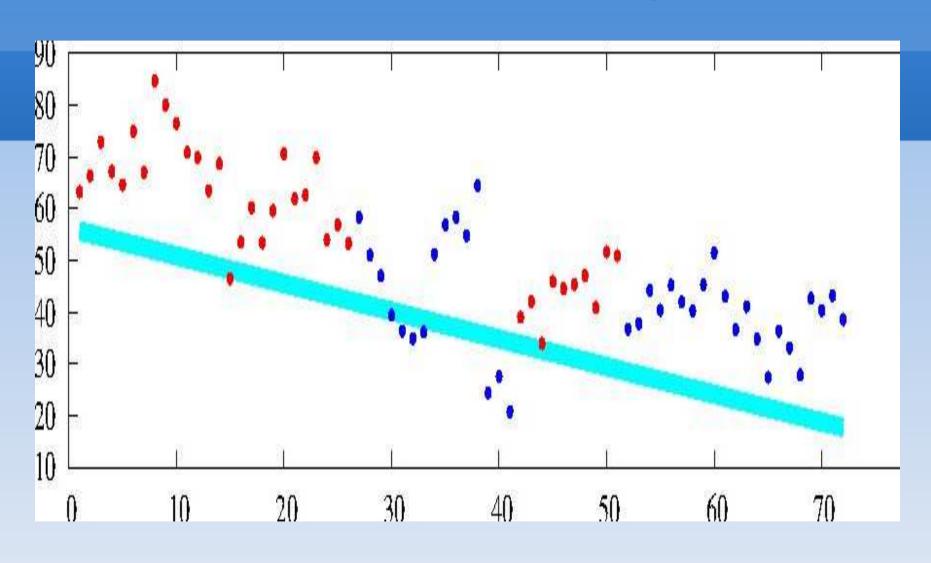
- Гауссовский процесс
- Корреляционная функция
- Сечение процесса
- Реализация
- Стационарность
- Эргодичность



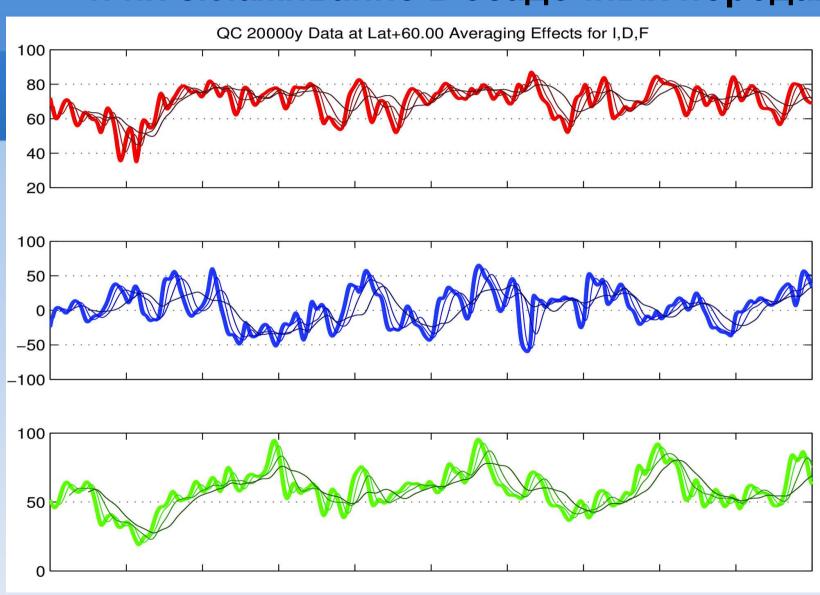
Пример реальных данных.(Павлов-Галле 2008). X-см, Y-наклонения в °



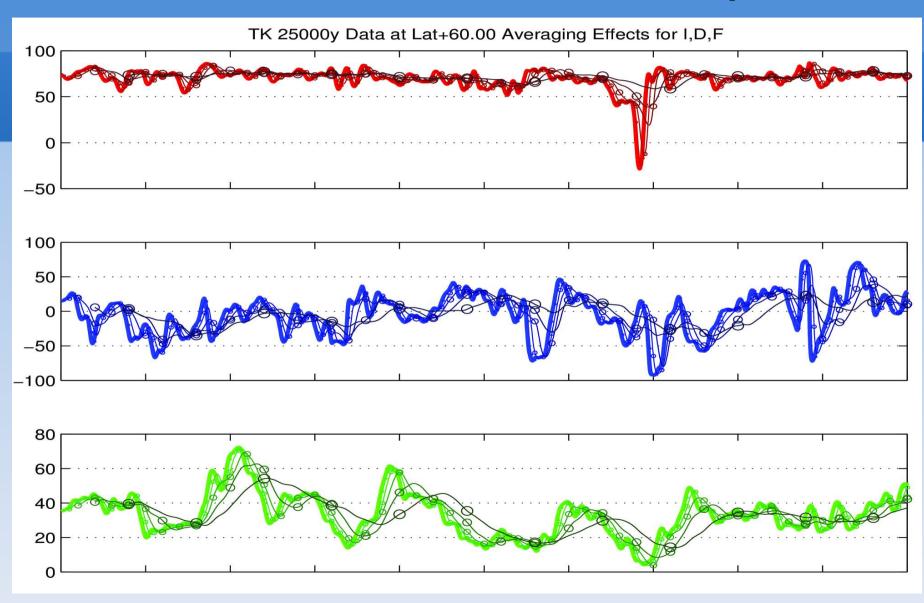
Пример реальных данных (Swansson-Hyzel) Keweeenawan 1100 My



НеРеальные QC-данные 60°N. и их сглаживание в осадочных породах

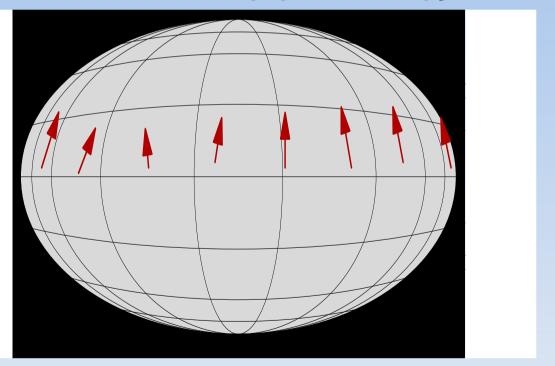


НеРеальные ТК-данные 60°N. и их сглаживание в осадочных породах



Аналитическая модель главного магнитного поля Земли

В каждой географической точке (Lat, Long) поле можно описать в терминах коэффициентов {g_i,h_i} глобального разложения потенциала по сферическим функциям



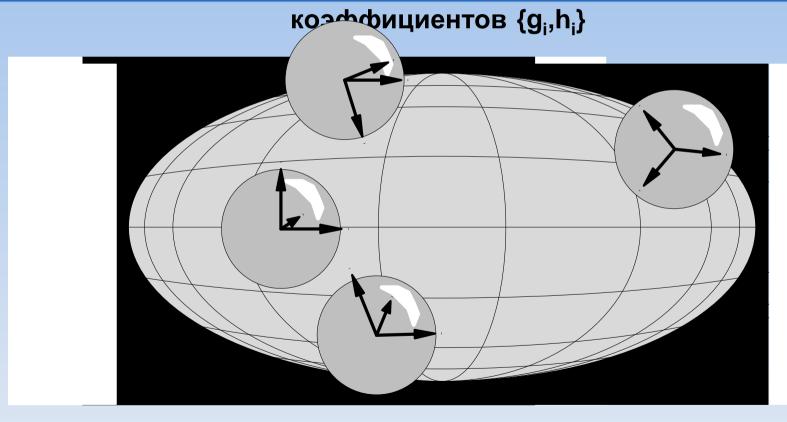


Модель Вариаций

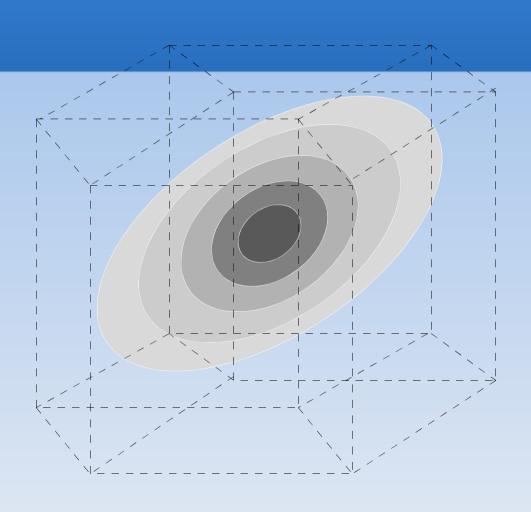
- Статическая: коэффициенты {g,h} многомерное гауссовское распределение
- Динамическая: коэффициенты {g,h} многомерный гауссовский процесс,
- Было предложено *несколько* таких модельных описаний (GGP-модели) для эпохи Brunhes [-780000,Now].

Статистическая модель главного магнитного поля Земли

в каждой точке имеется случайный вектор В, параметры его распределения (и зависимость от времени) вычисляются из



GGP-модели задают через многомерное распределение коэффициентов {g,h} + многомерная корреляционная функция



Методы проверки моделей на реальных данных

Какая из моделей верна?Статистика направлений случайного векторного поля.

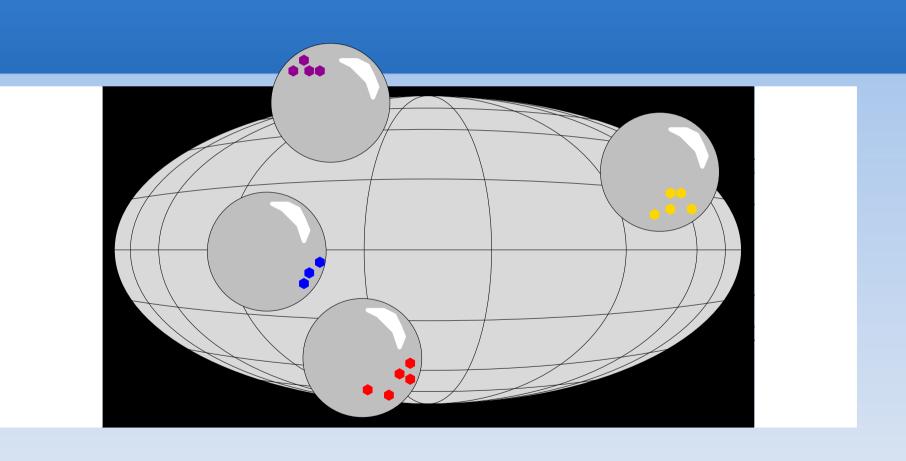
Постановка задачи

- Коэффициенты {g,h} описывают в терминах многомерного гауссовского распределения, то есть вектора мат.ожиданий и ковариационной матрицы.
- Было предложено *несколько* таких модельных описаний (GGP-модели) для эпохи Brunhes [-780000,Now].
- Имеющиеся данные однако не векторные, а только лишь направления векторов!
- Как корректно можно проверять соответствие статистической модели и данных?

Методы проверки моделей на реальных данных

Статистика направлений случайного векторного поля не укладывается в обычную (параметрическую) методику. Нужны новые методы.

Распределения направлений поля В (отвечающего GGP-модели) в различных географических точках.



Распределения направлений. Аналитическое описание.

The Angular Gaussian distribution

Consider the unit sphere Σ in \mathbb{R}^3 centered at the origin O. Let spherical coordinates in \mathbb{R}^3 be (ς, ρ) where $\varsigma \in \Sigma$ and ρ denotes the distance from the origin O (below we identify point $\varsigma \in \Sigma$ with unit vector \mathbf{u} in \mathbb{R}^3). The probability density in \mathbb{R}^3 for $\vec{\mathbf{V}}$ in this spherical coordinates would be $f_V(\varsigma, \rho)d\varsigma d\rho$.

The directions of $\vec{\mathbf{V}}$ are the projections of the random vector $\vec{\mathbf{V}}$ along the rays from the origin O to the unit sphere Σ , the corresponding distribution on Σ we are searching – the Angular Gaussian distribution – simply reads:

$$f_{\alpha \bullet}(\varsigma)d\varsigma = \left[\int\limits_{0}^{\infty} f_{\nu}(\varsigma,\rho)d\rho\right]d\varsigma \tag{1}$$

In a local Cartesian coordinate system x^1, x^2, x^3 with the same origin O, the Gaussian vector field $\vec{\mathbf{V}}$ can be characterized by $\mathbf{m} = \mathbf{E}(\vec{\mathbf{V}}) = (\mathbf{E}V^1, \mathbf{E}V^2, \mathbf{E}V^3)$ and $\mathrm{Cov}(\vec{\mathbf{V}}, \vec{\mathbf{V}}) = [\mathrm{cov}(V^i, V^j)]$. Let then $\Lambda = [\Lambda^{i,j}]$ be the inverse (hence, also symmetric) matrix of $\mathrm{Cov}(\vec{\mathbf{V}}, \vec{\mathbf{V}})$. With respect to this local Cartesian coordinates the pdf of $\vec{\mathbf{V}}$ reads:

$$f_{V}(x^{1}, x^{2}, x^{3}) = \sqrt{\frac{\det \Lambda}{(2\pi)^{3}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \Lambda^{ij} (x^{i} - EV^{i}) (x^{j} - EV^{j}) \right]$$
 (2)

or

$$f_{v}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{\Lambda}}{(2\pi)^{3}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x} - \mathbf{m}), \mathbf{x} - \mathbf{m} \right) \right]$$
 (3)

Set the new inner product $(\mathbf{x},\mathbf{y})_{\mathbf{A}}=(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{y})$ and corresponding norm $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}=\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})_{\mathbf{A}}}$. Then distribution density can be expressed in "spherical-like" coordinates (ρ,\mathbf{u}) in \mathbb{R}^3 :

$$f_{\nu}(\rho \mathbf{u})d\mathbf{u}d\rho = \sqrt{\frac{\det \mathbf{\Lambda}}{(2\pi)^3}} e^{-\frac{1}{2}\|\rho \mathbf{u} - \mathbf{m}\|_{\mathbf{\Lambda}}^2} \rho^2 d\mathbf{u}d\rho \tag{4}$$

After ρ -integration (1) we get

$$f_{ae}(\mathbf{u}) = e^{-\frac{1}{2}m^2} \cdot \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{4\pi \|\mathbf{u}\|_{\Lambda}^3} \left[z \sqrt{\frac{2}{\pi}} + e^{\frac{1}{2}z^2} (1+z^2) \left[1 + \operatorname{Erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right] \right]$$
 (5)

where

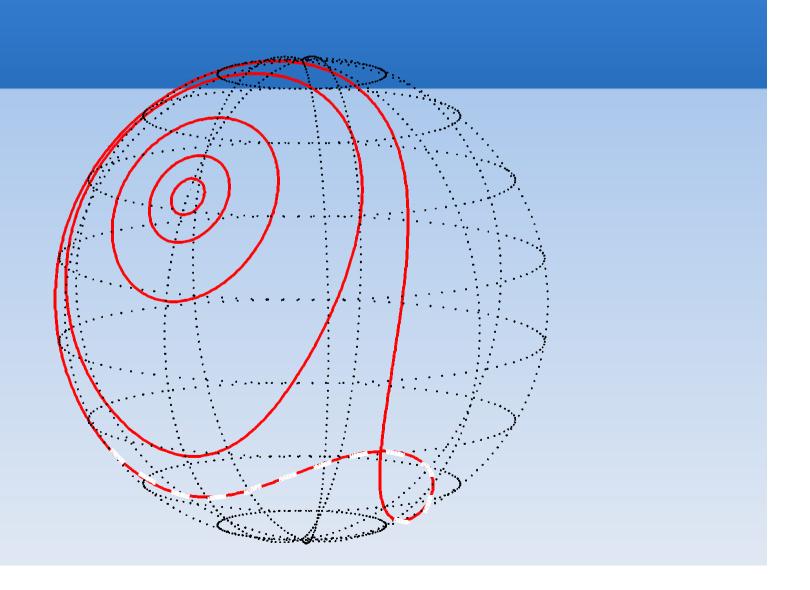
$$z = \frac{(\mathbf{m}, \mathbf{u})_{\mathbf{\Lambda}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{\Lambda}}}; \qquad m = \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{\Lambda}}$$
 (6)

this means that z is Λ -projection of \mathbf{m} to the direction \mathbf{u} and m is Λ -norm of \mathbf{m} . Since Λ is positive $-m\leqslant z\leqslant m$.

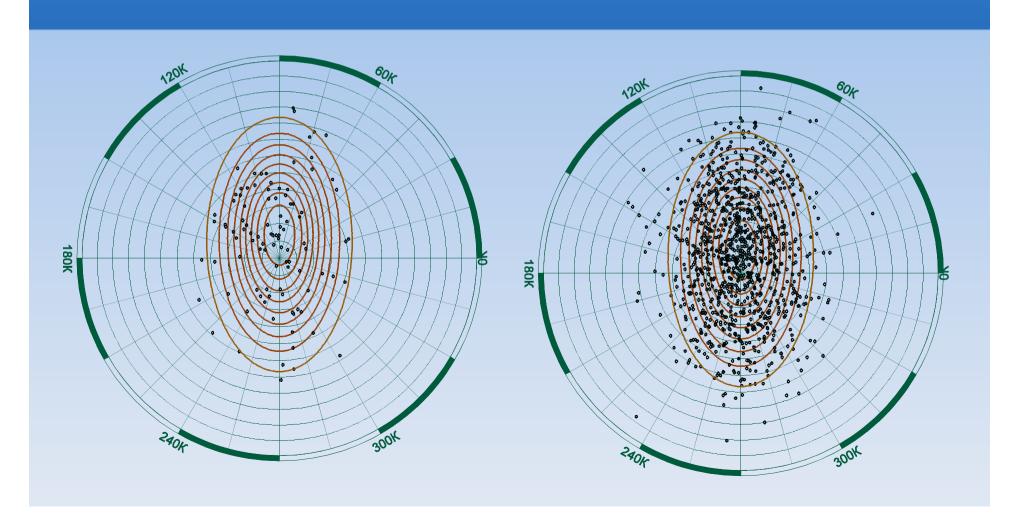
In other way formula 5 reads:

$$f_{\alpha \bullet}(\mathbf{u}) = \frac{\sqrt{\det \mathbf{\Lambda}}}{4\pi \|\mathbf{u}\|_{\lambda}^{2}} \left[z \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}m^{2}} + e^{\frac{1}{2}(z^{2}-m^{2})} (1+z^{2}) \left[1 + \operatorname{Erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right] \right]$$
(7)

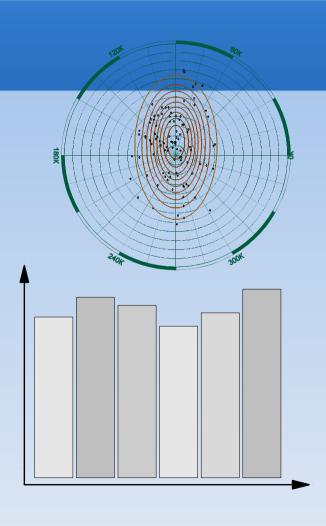
Изолинии плотности f=const в одной из географических точек.



Гауссовская модель коэффициентов {g,h} порождает в каждой географической точке распределение направлений, известное как angular gaussian или Bingham. Пример данных и линий уровня для плотности.

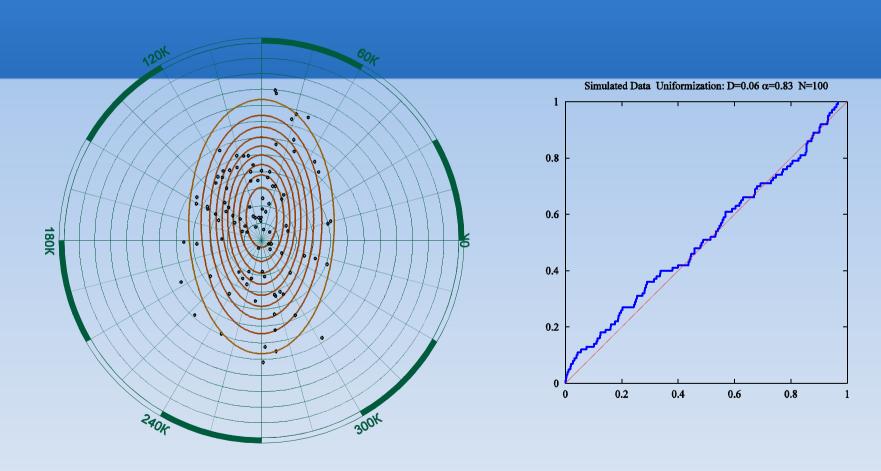


Р-униформизация

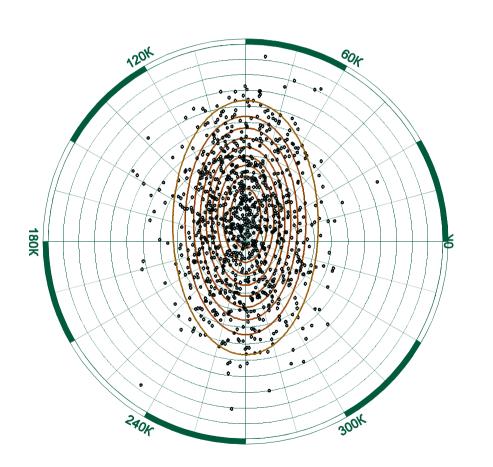


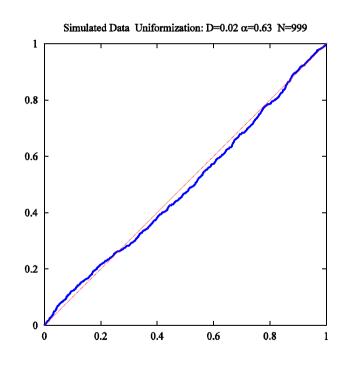
• Основная идея: используя области, определяемые Визолиниями преобразовать локальные данные по направлениям в одномерную равномерно распределенную случайную величину Р(В), избавившись тем самым от параметров распределения, связанных с данной географической точкой.

Р-униформизация для 100 точек. Функция распределения после униформизации.

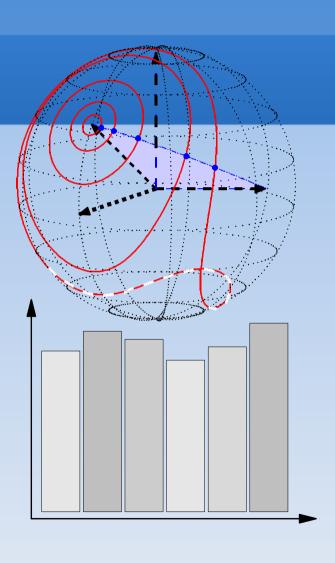


Р-униформизация для 999 точек. Функция распределения после униформизации.



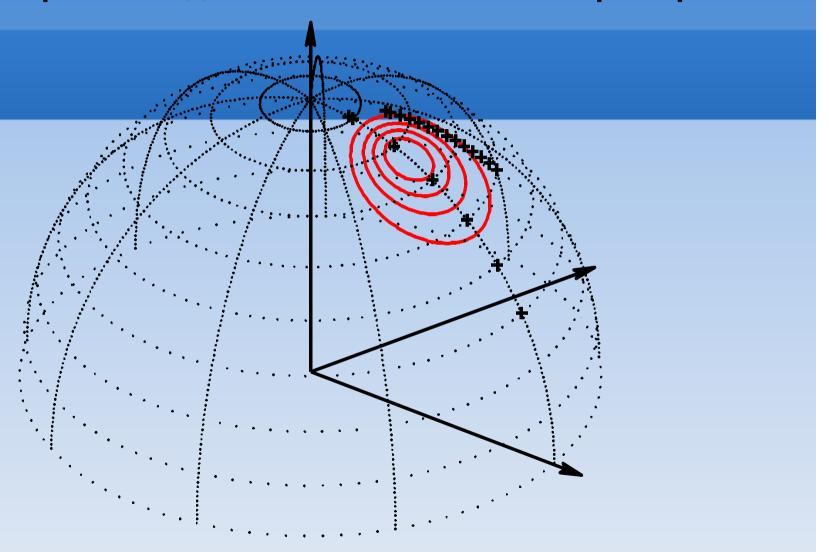


Q-униформизация

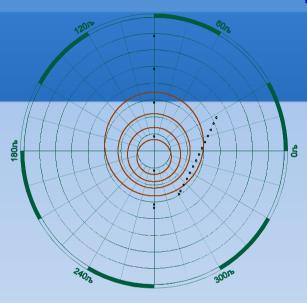


Основная идея:
преобразовать локальные
данные в одномерную
равномерно распределенную
случайную величину
Q(β)/Q(В), избавившись тем
самым от параметров
распределения, связанных с
данной географической
точкой

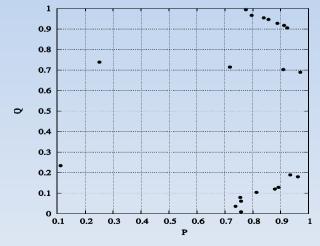
Распределения направлений и способы отображений данных. Синтетический пример.



Распределения направлений и способы отображений данных. Синтетический пример, продолжение.



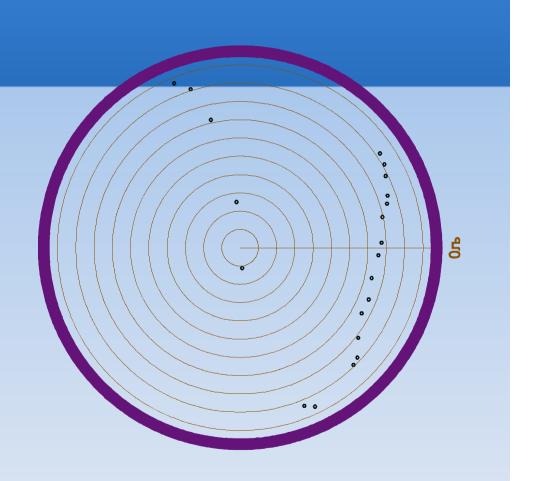
• Данные вместе с изолиниями плотности.



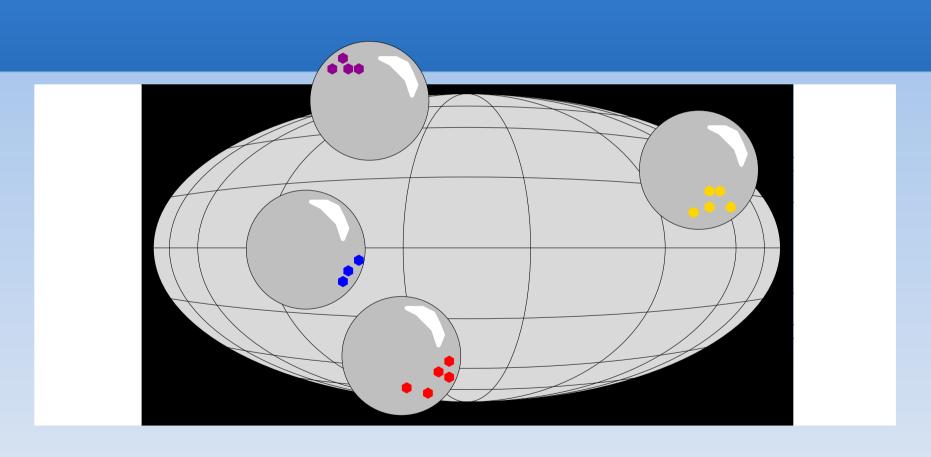
• PQ-униформизация данных.

Распределения направлений и способы отображений данных. Синтетический пример, окончание.

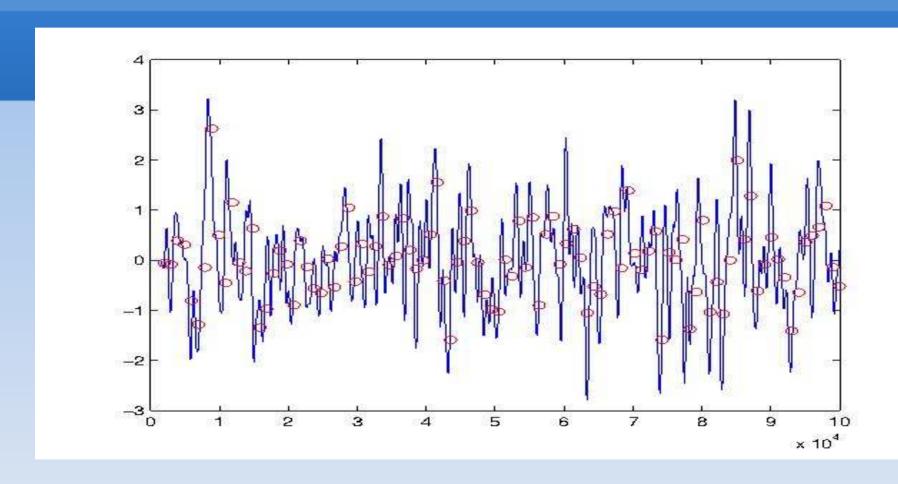
• РQ-униформизация относительно плотности, но Р,Q используются как «полярные» координаты в единичном диске. Этот подход является естественным обобщением VGP-преобразования.



Перспектива 1: исследование с помощью PQ-униформизации региональных распределений и выявление движений жестких плит.



Перспектива 2: связь скорости осадконакопления и наблюдаемых характеристик вековых вариаций.



BCË!