

ПАРАМАГНЕТИЗМ ПЛАЗМЫ И ВОЛНЫ ХОЛЛА*В.В. Копейкин*

(Материалы 20-й Российской конференции по
ХТЯ и ШМ. с. 131 – 141. Лоо, Сочи, Краснодарский край.
29 сентября – 6 октября 2013.)

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радио-
волн РАН им. Н.В. Пушкова.

142190, Москва, Троицк, Калужское шоссе, 4.

E-mail: kopeikin@izmiran.ru

Эффект Холла в столкновительной плазме может привести к возникновению нелинейной плазменной волны. При ее распространении возникают большие электрические поля и она может стать источником высоковольтных импульсов, что является основой нашей модели шаровой молнии и что зафиксировано нами экспериментально по радиоизлучению искусственных шаровых молний. Ранее мы получили уравнение для волны Холла из системы уравнений Максвелла. В настоящей работе приводится вывод этого волнового уравнения с помощью уравнений магнитной гидродинамики.

1. Введение.

Разряд в воздухе одиночного, или пачки коротких однополярных электрических импульсов, может привести к возникновению столкновительной плазмы, в которой радиус ларморовского вращения электронов под действием магнитного поля разряда составит половину длины их свободного пробега и более. В этих условиях плазма приобретает парамагнитные свойства, когда ее внутреннее магнитное поле,

определяемое столкнувшимися электронами, совпадет с направлением возбуждающего внешнего поля, возникшего при электрическом разряде (рис. 1.).

Выключение внешнего возбуждающего поля в этом случае не приведет к мгновенному исчезновению внутреннего поля, как это происходит в диамагнетиках, а будет определенным образом изменяться во времени и пространстве. Динамика этого процесса описывается волновым уравнением, которое мы получили в [Копейкин, 2010] из системы уравнений Максвелла.

В настоящей работе предлагается альтернативный подход к выводу уравнений, описывающих процесс изменения магнитного поля плазмы в пространственно-временной области, который мы называем волнами Холла, с помощью уравнений магнитной гидродинамики. В отличие от первого подхода, предлагаемый вывод волнового уравнения учитывает динамику изменения электронной концентрации плазмы в процессе распространения волны Холла.

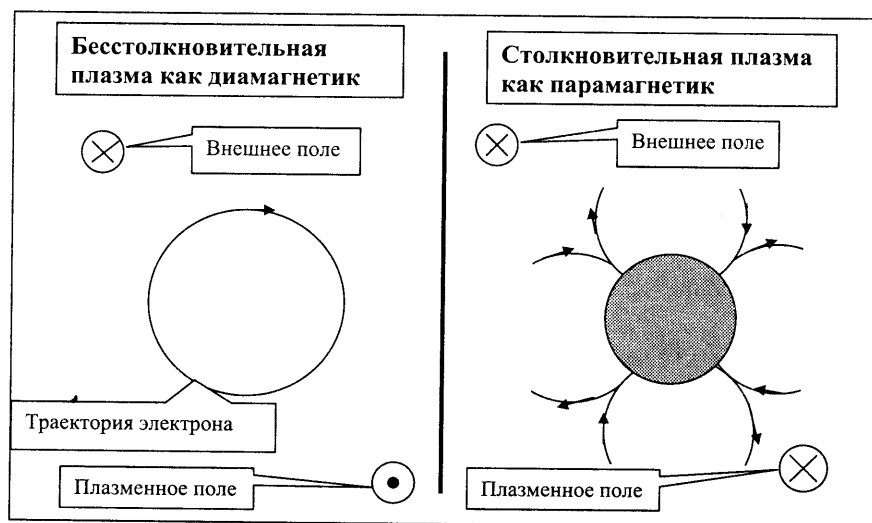


Рис. 1. Плазма как диамагнетик и как парамагнетик.

2. Постановка задачи

При электрическом разряде в воздухе концентрация электронов n_e в плазме примерно на пять порядков ниже концентрации нейтральных частиц n_0 . Характерные значения этих параметров: $n_e \approx 3 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$, $n_0 = 2.683 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ (Число Лошмидта).

Магнитная индукция B_z , вызванная током разряда, приведет к ларморовскому вращению электронов в плоскости (xy) по окружности радиуса

$$R_L = \frac{V_{xy}}{\omega_L}, \quad (1)$$

Где V_{xy} - проекция скорости на плоскость (xy) , ω_L - циклотронная частота, определяемая как

$$\omega_L = \frac{eB_z}{m_e} \quad (2)$$

Здесь e - заряд электрона, m_e - масса электрона.

Если ларморовский радиус R_L больше половины длины свободного пробега $\lambda/2$, плазма будет столкновительной. Например, тепловая скорость электрона при $T = 11600 \text{ К}$ равна $V = 0.74 \cdot 10^6 \text{ м/с}$, частота соударений с нейтральными частицами при прямолинейном движении электронов $\nu = 2 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, длина свободного пробега $\lambda = 3.7 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

Для таких параметров плазма перестанет быть столкновительной ($R_L \leq \lambda/2$) при индукции магнитного поля $B_z \geq 22T$. При этом она потеряет свои парамагнитные свойства и станет диамагнетиком.

Рис. 2 и 3 показывают механизм возникновения внутреннего магнитного поля плазмы, направленного в сторону внешнего поля.

Далее мы будем описывать эволюцию поля без внешнего источника, предполагая, что в начальный момент времени существует только плазма и ее собственное магнитное поле, при этом тепловая скорость электронов поддерживается постоянной.

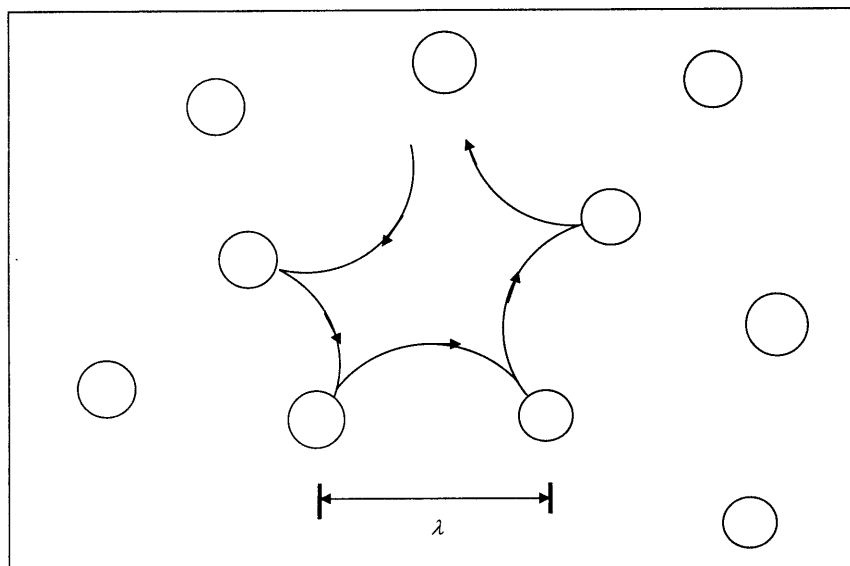


Рис. 2. Схема теплового блуждания электрона среди нейтральных частиц в магнитном поле.

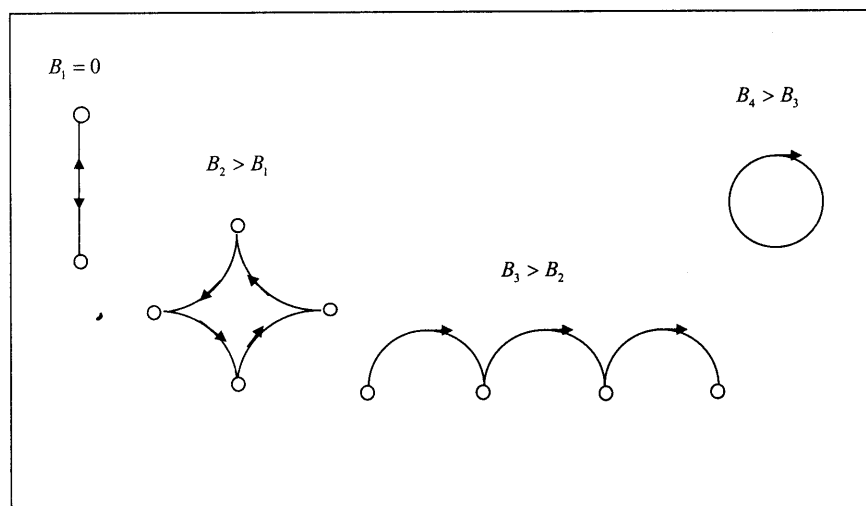


Рис.3. Схема усредненных траекторий электронов при повышении индукции магнитного поля.

3. Волны Холла.

Рассмотрим уравнение магнитной гидродинамики для вектора магнитной индукции \vec{B} в плазме [Кадомцев 1988, Чен 1987]:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) = 0 \quad (3)$$

Оно известно как уравнение для идеальной плазмы (или уравнение для замороженного магнитного поля) и является частным случаем общего уравнения:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B} = 0 \quad (4)$$

Уравнение (3) часто используется для описания плазмы с большой проводимостью σ , когда диффузией магнитного поля в среду можно пренебречь.

Нас интересует другой случай: мы будем описывать магнитное поле в предположении, что среда следует за ним, т.е. речь идет о замороженности среды в магнитное поле. Как и в случае замороженности поля в среду, это условие выражается в возможности отбрасывания последнего члена с ∇^2 в (4).

В качестве причины замороженности среды в магнитное поле рассмотрим зависимость поступательной тепловой скорости электронов от индукции магнитного поля. Чем больше индукция поля, тем ниже поступательная скорость, поскольку радиус ларморовского вращения уменьшается (рис. 4).

Средняя поступательная скорость электронов, с точностью до двух членов разложения функции \arcsin в ряд Тейлора, выражается формулой:

$$\langle V \rangle = \frac{\langle V_{xy} \rangle}{1 + \left(\frac{\lambda^2 e^2}{24 m_e^2} \right) B_z^2} \quad (5)$$

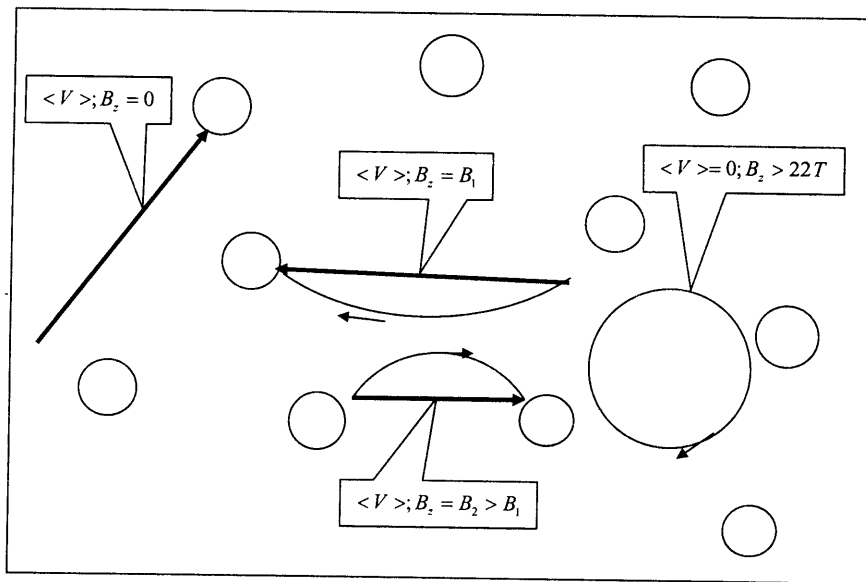


Рис. 4. Средняя поступательная скорость теплового движения электронов при увеличении магнитной индукции.

Условие вмороженности позволяет значительно упростить задачу, когда вопрос об изменении свойств среды (электронной концентрации) в процессе распространения волны Холла становится простым. В начальных условиях будем предполагать, что распределение плазмы в пространстве повторяет функцию начального магнитного поля, и дальнейшее распределение плазмы также будет повторять изменения поля.

Выясним, с какими параметрами магнитного поля и плазмы связано условие вмороженности применительно к нашей задаче.

Если существует неоднородное, не зависящее от времени магнитное поле, то за счет теплового движения электронов их концентрация через какое-то время будет пропорциональна индукции поля, вне зависимости от величины проводимости плазмы. Электроны сконцентрируются там, где индукция максимальна, поскольку здесь их поступательная скорость теплового дрейфа минимальна, и существует приток электронов с соседних участков, где эта скорость выше (рис. 5).

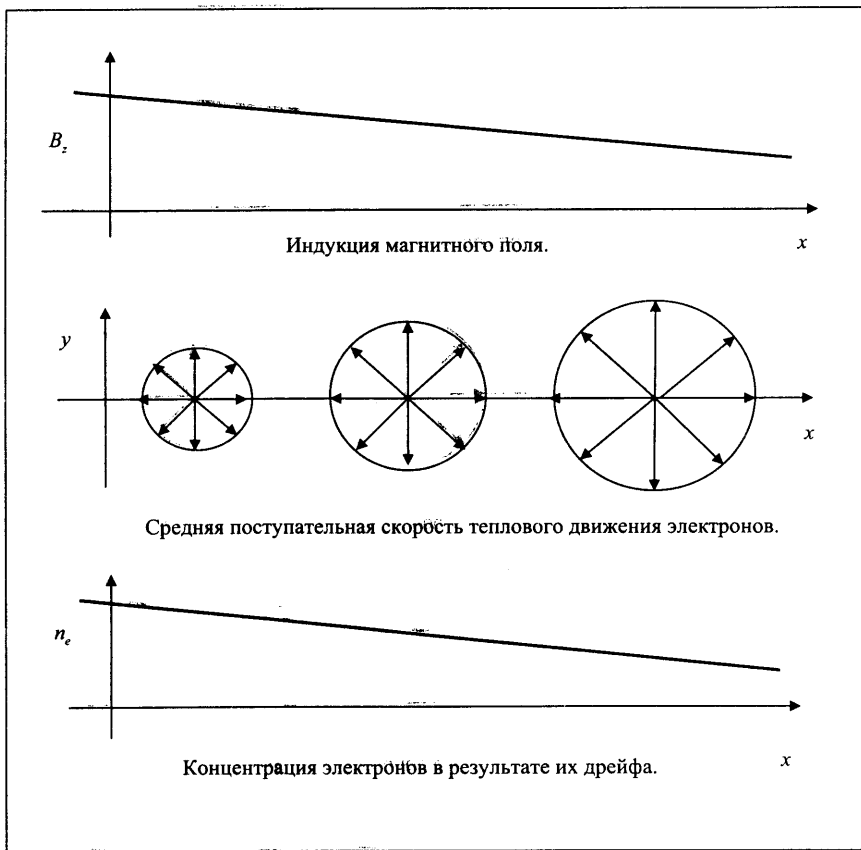


Рис. 5. Механизм возникновения замороженности среды в поле.

Условие замороженности плазмы в поле для каждой точки пространства может быть записано как:

$$\frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{1}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (6)$$

Концентрация электронов - это их количество в единичном объеме, которое, в нашем случае, зависит от времени, поскольку существует градиент их средней поступательной скорости:

$$n_e(t) = \frac{N_e}{(l_x)(l_y)(l_z) - (l_y)(l_z) \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial x} (l_x)t} \quad (7)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{N_e}{(l_x)(l_y)(l_z) - (l_y)(l_z) \frac{\partial V}{\partial x} (l_x)t} l_x \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial x} = n_e l_x \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial x} \quad (8)$$

Градиент средней поступательной скорости электронов, перемещающихся вдоль оси x :

$$\frac{\partial \langle V \rangle}{\partial x} = - \frac{\langle V_{xy} \rangle}{\left[1 + \left(\frac{\lambda^2 e^2}{24 m_e^2} \right) B_z^2 \right]^2} \frac{\lambda^2 e^2}{12 m_e^2} B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (9)$$

или

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = - \frac{\langle V_{xy} \rangle}{1 + \left(\frac{\lambda^2 e^2}{24 m_e^2} \right) B_z^2} \frac{\lambda^2 e^2}{12 m_e^2} B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \approx - \frac{1}{2} \langle V_{xy} \rangle \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (10)$$

Рассмотрим траектории движения электронов, столкнувшихся с нейтральной частицей. Соударение может быть как упругим, так и не упругим (рис. 6, 7).

Когда размеры нейтральной частицы значительно меньше длины свободного пробега, то можно считать, что все столкнувшиеся электроны, движущиеся по ларморовским орбитам, имеют относительно этой частицы тангенциальную компоненту скорости V_ϕ , определяемую формулой:

$$V_\phi = \frac{reB_z}{2m_e}, \quad r \leq \lambda/2, \quad (11)$$

где r - модуль радиус-вектора \vec{r} из центра частицы до электрона, лежащего в той же плоскости (x, y) , что и частица. Вывод формулы поясняется рис. 8.

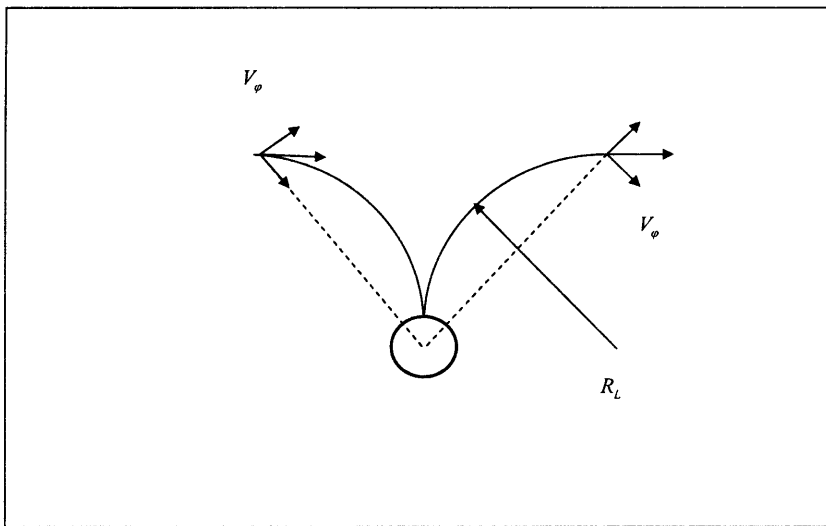


Рис. 6. Упругое соударение электрона с нейтральной частицей.

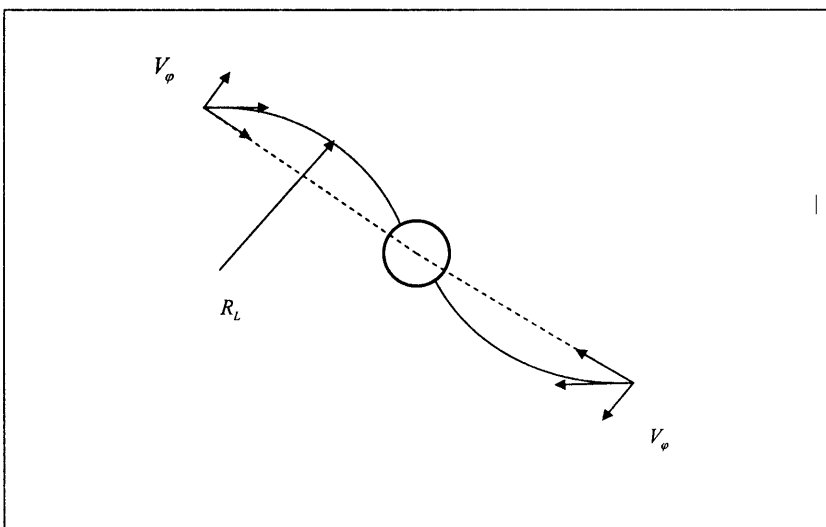


Рис. 7. Неупругое соударение двух электронов с нейтральной частицей.

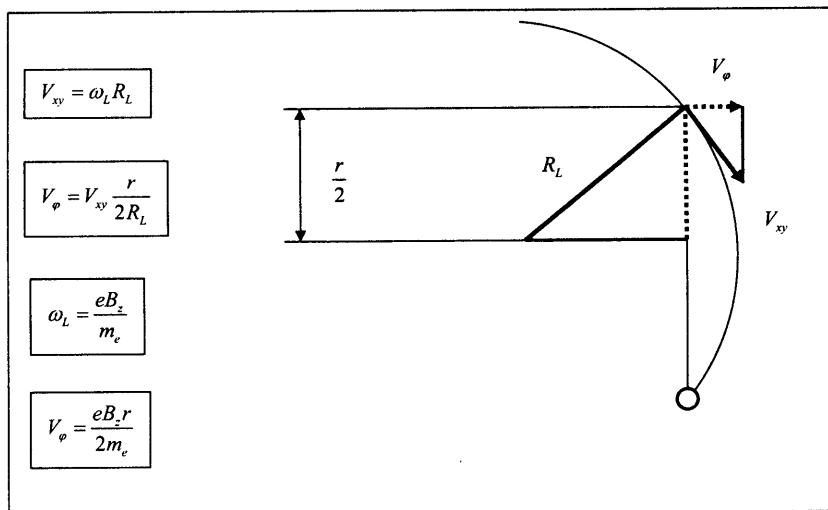


Рис. 8. Схема расчета тангенциальной скорости столкнувшегося с частицей электрона.

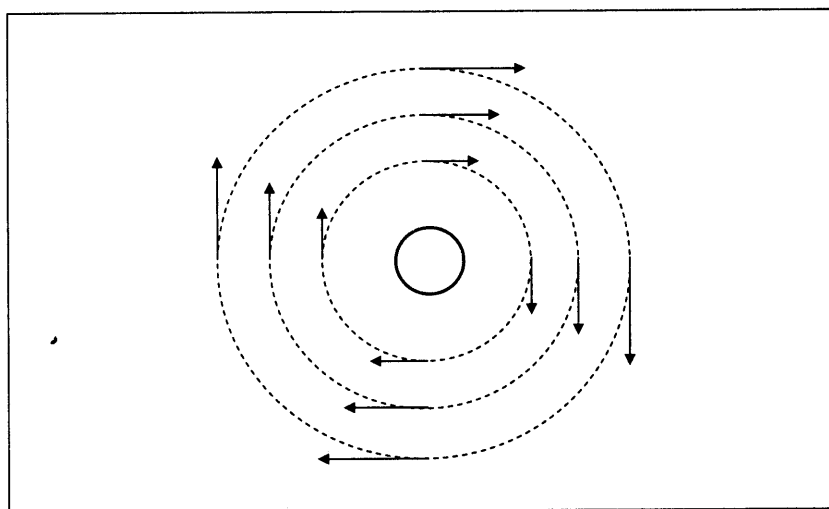


Рис. 9. Средний круговой ток вокруг нейтральной частицы.

Столкнувшиеся электроны, как прямые, так и упруго отраженные нейтральной частицей, образуют вокруг нее круговой ток (рис. 9).

Тангенциальная скорость электронов (11) записывается в векторной форме как:

$$\vec{V} = \frac{e\vec{B}_z}{2m_e} \times \vec{r} \quad (12)$$

Используя выражение для скорости (12), найдем векторное произведение $(\vec{V} \times \vec{B}_z)$:

$$(\vec{V} \times \vec{B}_z) = \frac{eB_z^2}{2m_e} \vec{r} = \vec{E}_h(r) \quad (13)$$

Формула (13) описывает эффект Холла и означает, что каждая нейтральная частица плазмы, с которой происходят столкновения электронов при наличии магнитного поля, является генератором напряженности электрического поля E_h , занимающем на плоскости $z = const$ площадь $S_h \sim \lambda^2$, а вдоль оси z высоту h_h , связанную с эффективным сечением соударений Q как $h_h \sim \sqrt{Q}$ [4].

Напряженность электрического поля в микрогенераторе Холла имеет размерность:

$$[E_h] = A^{-1} \cdot s^{-3} \cdot kg \cdot m = V \cdot m^{-1}$$

В отличие от реализованных и используемых на практике МГД-генераторов электроэнергии на эффекте Холла [Урусов, 1966], рассматриваемый нами микрогенератор имеет квадратичную зависимость напряженности поля от магнитной индукции. Причина в том, что здесь магнитное поле играет двойную роль: во-первых, оно является «внешним», приводящим к эффекту Холла, во-вторых, оно вызывает упорядоченное круговое движение электронов и входит в формулу для их скорости (12).

Схематически, принципы работы промышленного МГД-генератора, и микрогенератора Холла показаны на рис. 10 и 11.

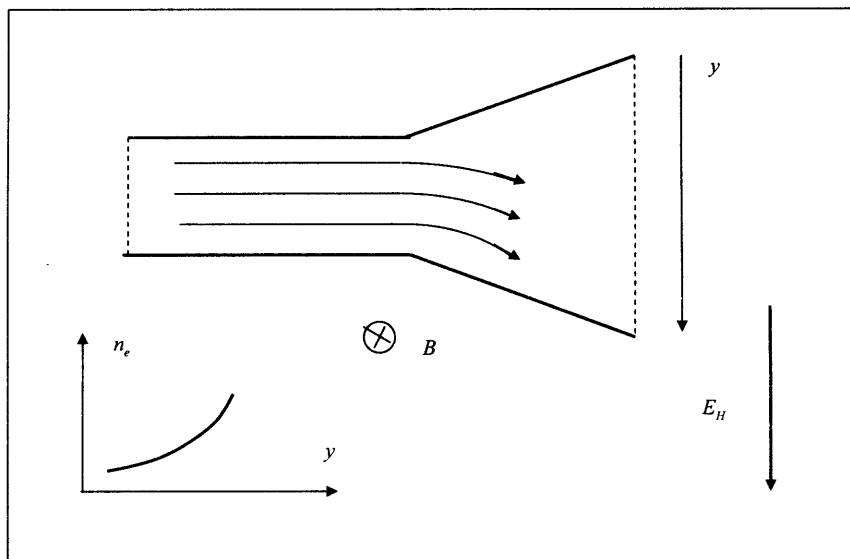


Рис. 10. Принцип работы МГД – генератора Холла для получения промышленной электроэнергии.

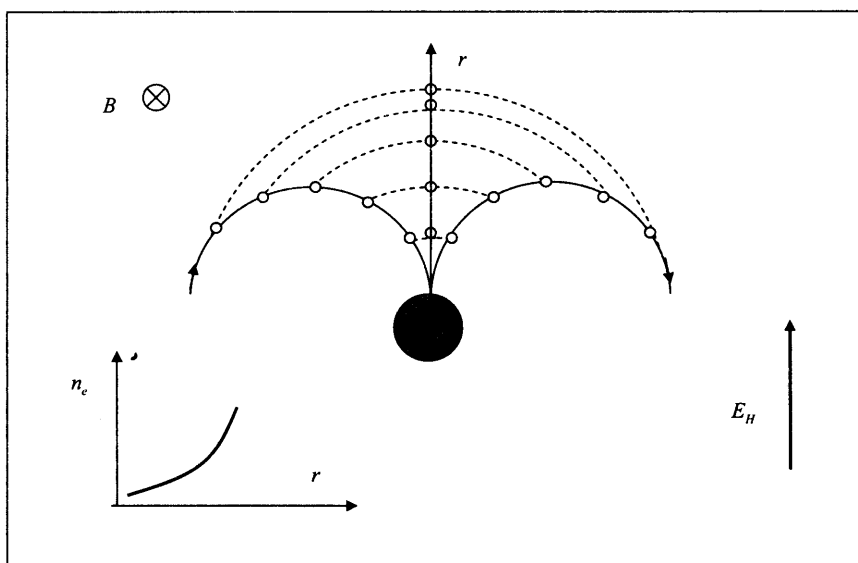


Рис. 11. Принцип возникновения микрогенератора Холла в столкновительной плазме вокруг нейтральной частицы.

Найдем макроскопическое электрическое поле с временными масштабами $\Delta t \gg T_0$ и с пространственными масштабами $\Delta x \gg \lambda$, $\Delta y \gg \lambda$, возбуждаемое микрогенераторами Холла.

Поскольку концентрация электронов n_e может быть значительно ниже концентрации нейтральных частиц n_0 , то рассматривать нейтральную частицу как микрогенератор Холла можно только на периодах времени, когда произойдет достаточно большое количество столкновений этой частицы с электронами. Характерное время между столкновениями электронов с частицей оценивается как:

$$T_0 = \frac{n_0}{n_e \nu}, \quad (14)$$

где ν - частота столкновений.

Воспользуемся определением напряженности электрического поля, предполагая его квазистатический характер, через скалярный потенциал φ

$$\vec{E} = \nabla \varphi$$

Разность потенциалов (напряжение) $U = \varphi_b - \varphi_a$ между двумя точками определяется как:

$$U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r} \quad (15)$$

Найдем напряжение электрического поля на противоположных концах микрогенератора Холла $x = a = -\lambda/2$ и $x = b = \lambda/2$, центр которого расположен на оси x . Напряженность поля относительно центра направлена в противоположные стороны, но наличие производной

$$\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

приводит к асимметрии генератора вдоль этой оси. Индукция магнитного поля на одной из границ равна

$$B_z - \frac{\partial B_z}{\partial x} \frac{\lambda}{2}, \quad \text{на другой} \quad B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x} \frac{\lambda}{2}.$$

Напряжение между противоположными точками генератора, в соответствии (13) и (15), равно:

$$\begin{aligned} U_h &= \frac{e}{2m_e} \int_0^{\lambda/2} \left(B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x} x \right)^2 x dx - \frac{e}{2m_e} \int_0^{\lambda/2} \left(B_z - \frac{\partial B_z}{\partial x} x \right)^2 x dx = \\ &= \frac{2e}{m_e} \int_0^{\lambda/2} B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} x^2 dx = \frac{\lambda^3 e}{12m_e} B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (16)$$

Перейдем от микроскопических пространственных масштабов порядка длины свободного пробега электронов, к макроскопическим, предполагая, что расстояние между точками a и b вдоль оси x много больше этой длины, т.е.

$$|a - b| \gg \lambda$$

Теперь ось x может пересекать микрогенераторы в произвольном сечении, а не только через их центр, что приведет к уменьшению их вклада в результирующее напряжение. Если считать, что отклонение сечения от центра по поперечной координате y равновероятно, то уменьшение напряжения можно учесть введением поправочного коэффициента

$$K_1 = \frac{\pi}{4}$$

Напряжение усредненного поля в предположении, что количество пересекаемых генераторов равно $n \approx dx / \lambda$, записывается как:

$$U = K \frac{\lambda^2 e}{m_e} B_z \frac{\partial B_z}{\partial x} dx \quad (17)$$

$$K = \frac{\pi}{48} \quad (18)$$

Безразмерный коэффициент (18) получен для условия линейного возрастания напряженности поля микрогенераторов от расстояния r (13), когда имеется достаточно большое количество столкнувшихся с частицей электронов со скоростями

$$V_{xy} \geq \frac{\lambda e B_z}{2m_e}$$

Более реалистичное распределение электронов по скоростям может привести к другому значению коэффициента, что, тем не менее, не повлияет на физику рассматриваемых процессов.

Напряженность электрического поля в плоскости (x, y) будет иметь вид:

$$\vec{E} = K \frac{\lambda^2 e}{m_e} B_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial B_z}{\partial y} \vec{i}_y \right) \quad (19)$$

Для нахождения функции ротора электрического поля (19), возбуждаемого микрогенераторами Холла (13) и одновременного его усреднения по пространству, воспользуемся теоремой Стокса: поток ротора через поверхность равен циркуляции вектора вдоль ее границы:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (20)$$

Зададим длину контура интегрирования $L \gg \lambda$.

Вычисляя циркуляцию вектора электрического поля вдоль границы $CDA BC$ (рис. 12), получим:

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{s} = K \frac{\lambda e B_z}{m_e} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) xy \quad (21)$$

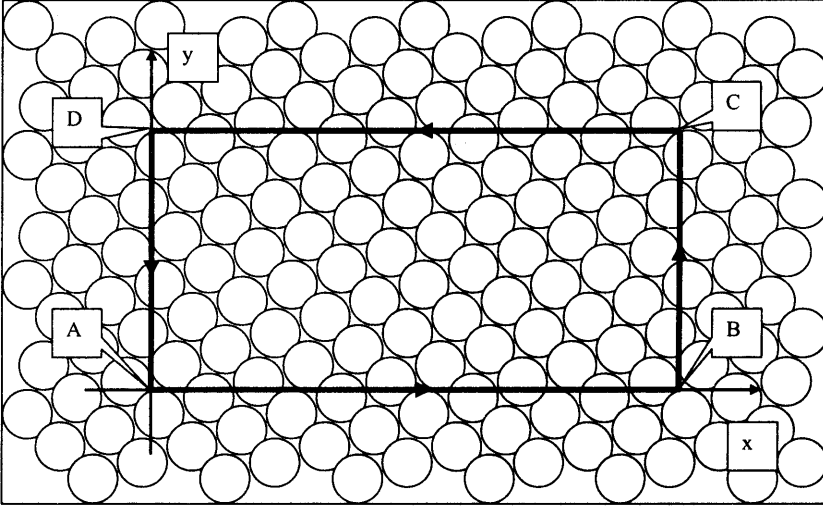


Рис. 12. Контур интегрирования в теореме Стокса.
Окружностями изображены микрогенераторы Холла.

Или

$$\nabla \times \vec{E} = K \frac{\lambda e B_z}{m_e} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \quad (22)$$

При вычислении циркуляции в (21) для определения разности потенциалов между точками мы применили тот же подход, что и при нахождении макроскопического электрического поля (17).

Здесь следует сделать некоторое замечание, поскольку довольно часто можно слышать утверждение: так как вектор электрического поля определен нами только через градиент скалярной функции, то из математического тождества $\nabla \times \nabla F = 0$ следует, что ротор (22) по определению равен нулю. В нашем случае следует использовать тождество:

$$\nabla \times \alpha \vec{F} = \alpha \nabla \times \vec{F} + \nabla \alpha \times \vec{F},$$

в котором первый член правой части, действительно, равен нулю, чего нельзя сказать о всей функции.

Из (3) и (22), можно получить волновое уравнение для индукции магнитного поля:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} - K \frac{\lambda e B_z}{m_e} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) = 0 \quad (23)$$

Величина

$$\left[K \frac{\lambda e B_z}{m_e} \right] = m \cdot s^{-1}$$

имеет размерность скорости.

Уравнение в частных производных первого порядка (23) хорошо известно в физике и математике, и его обычно называют уравнением Римана для простой волны. Этим уравнением описывается большой класс физических явлений: волны в транспортном потоке, распространение пожара, процесс генерирования СВЧ колебаний в клистронах, неустойчивость плазмы и многое другое [Гурбатов и др., 2008].

Для численных расчетов волнового уравнения (23) будем использовать суммарно-разностную первого порядка точности условно устойчивую схему.

$$B_{x,y}^{t+1} = \frac{1}{4} (B'_{x+1,y} + B'_{x-1,y} + B'_{x,y+1} + B'_{x,y-1}) + \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} B'_{x,y} (B'_{x+1,y} - B'_{x-1,y}) - \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta y} B'_{x,y} (B'_{x,y+1} - B'_{x,y-1}) \quad (24)$$

где

$$\alpha = K \frac{\lambda e}{m_e}$$

Здесь верхние индексы при B соответствуют временной координате t , нижние индексы – пространственным координатам x и y .

Условие устойчивости разностной схемы (24) требует выполнения соотношений между шагом по времени Δt и шагами по пространственным координатам Δx , Δy

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\alpha |B_{\max}|}; \quad \Delta t \leq \frac{\Delta y}{\alpha |B_{\max}|} \quad (25)$$

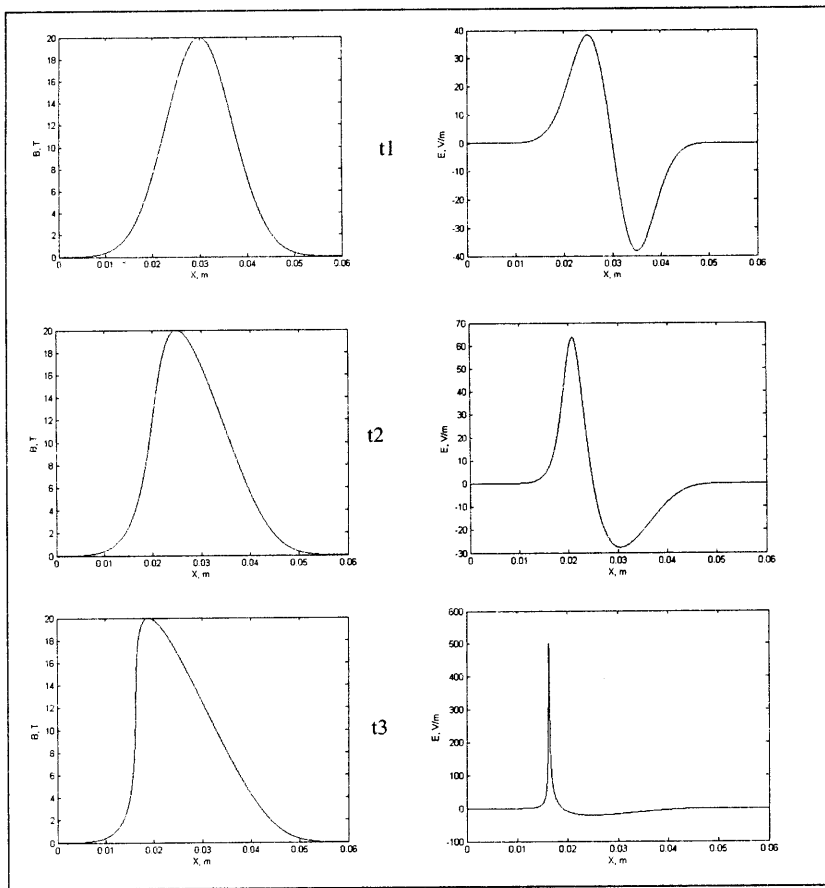


Рис. 13. Индукция магнитного и напряженность электрического полей в волне Холла в различные моменты времени.

Приведем результаты численных расчетов по суммарно-разностной схеме (24) для задачи, когда $\partial B_z / \partial y = 0$.

На рис. 13 показано пространственное распределение магнитной индукции B_z и электрического поля E_x в моменты времени 0, 50 и 100 нс для начального гауссоидального поля.

Начальное магнитное поле симметричной гауссоидальной формы начинает перемещаться влево, при этом его левая граница становится

круче, а правая положе. Возрастание пространственной производной левой границы приводит к появлению большой напряженности электрического поля. При дальнейшем движении, теоретически, производная магнитного поля и напряженность электрического станут бесконечными, и волна опрокинется.

Динамика электронной концентрации плазмы повторяет динамику магнитной индукции.

4. Заключение.

Экспериментально волны Холла можно наблюдать при электрическом разряде серии коротких однополярных импульсов, пример которого показан на рис. 14. В данном случае в качестве источника импульсов использовался генератор импульсного напряжения со следующими параметрами:

1. Выходное напряжение	160 КВ
2. Ток импульса	1 КА
3. Длительность импульса	175 нс
4. Частота следования импульсов	1 КГц

Как видно из рис.14, наблюдается поперечный относительно разряда перенос плазмы, связанный с распространением волны Холла.

Волна Холла – это нелинейная электромагнитная волна, в которой осцилляторами поля являются микрогенераторы Холла, возникающие при столкновении электронов, движущихся по ларморовским орбитам, с нейтральными частицами.

Уравнение (23) содержит частные производные первого порядка, по этой причине волна Холла относительно каждой пространственной координаты может двигаться только в одном направлении, определяемой направлением поперечного вектора магнитной индукции.

При некоторых условиях, волна Холла может стать причиной возникновения автогенератора высоковольтных импульсов, являющегося основой нашей модели шаровой молнии [Копейкин, 2010, 2014].

Радиоизлучение этих импульсов от искусственных шаровых молний нами зафиксировано экспериментально на двух установках – генераторе импульсного напряжения и трехконтурном трансформаторе Теслы [Копейкин, 2014].

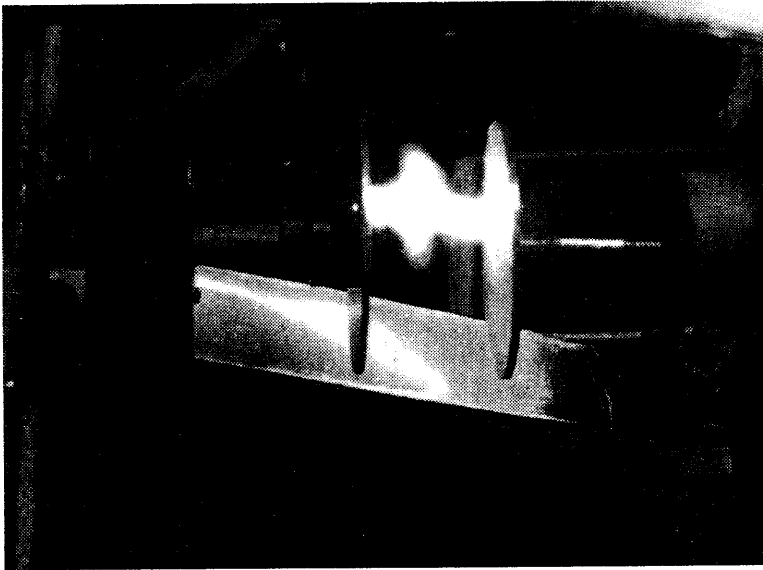


Рис. 14. Форма разряда через 0.2 с. после его возникновения.

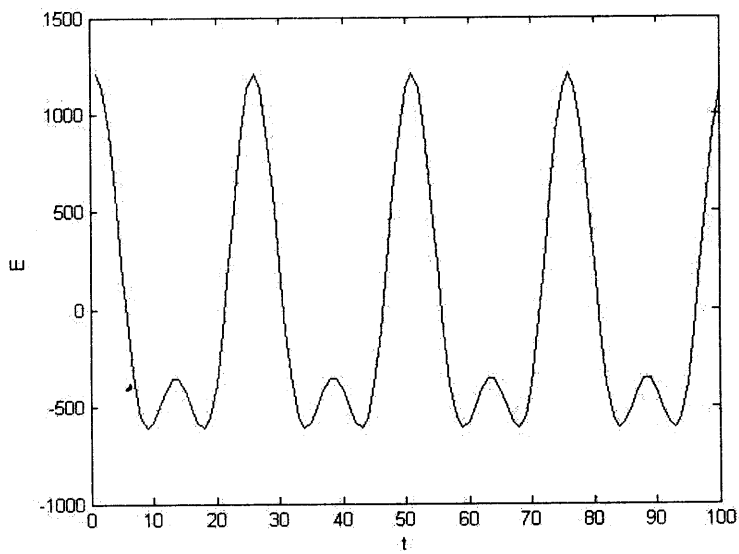


Рис. 15. Напряженность электрического поля от времени в разрядном промежутке трехконтурного трансформатора Теслы.

Вероятно, трехконтурный трансформатор был первым техническим устройством, позволившим Николе Тесле в 1899 г. получить искусственные шаровые молнии.

Братья Джеймс и Кеннет Корумы по описаниям Теслы повторили его установку, воспроизвели его эксперименты и подтвердили, что Никола Тесла умел получать искусственные шаровые молнии, идентичные природным [Корум, Корум, 1990].

Мы также воспроизвели установку Теслы, провели с ней эксперименты, и подтверждаем этот вывод Корумов.

В отличие от обычного, двухконтурного трансформатора Теслы, у трехконтурного имеются две вторичные обмотки, одна из которых настроена на вторую гармонику основной частоты. Это приводит к тому, что на разрядный промежуток задается асимметричное переменное напряжение, позволяющее развиваться волне Холла: напряжение обратной полуволны меньше, чем основной, и она до конца не гасит волну Холла, которая усиливается очередной прямой полуволной. Диаграмма напряженности электрического поля в разрядном промежутке трехконтурного трансформатора Теслы показана на рис. 15.

5. Литература

- Гурбатов С. Н., Руденко О. В., Саичев А. И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
- Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988.
- Копейкин В. В. Плазменный автогенератор высоковольтных импульсов.// Перспективные материалы. Спец. вып. 8. 2010, С.113-118.
- Копейкин В. В. Результаты измерений спектра радиоизлучения искусственных шаровых молний и проверка гипотезы об их плазмохимической природе.// Геомагнетизм и аэрномия, 2014, т. 54, № 1, с.124 -133.
- Корум К. Л., Корум Дж. Ф. Эксперименты по созданию шаровой молнии при помощи высокочастотного разряда и электрохимические фрактальные кластеры.// УФН, 1990, т. 160, вып. 4, С.47 – 58.
- Урусов И. Д. МГД-генераторы. М: Наука, 1966.
- Хаксли Л., Кромптон Р. Диффузия и дрейф электронов в газах. М: Мир, 1977.
- Чен Ф. Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987